А.А. ШАЛДАНБАЕВА, А.Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И.О. ОРАЗОВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауезова, г. Шымкент)

ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ

(Представлена академиком НАН РК Т.Ш.Кальменовым)

Аннотация

В настоящей работе получены граничные условия операторов Штурма-Лиувилля, обладающих счетным множеством, однократных собственных значений.

Ключевые слова: граничные условия, оператор, счет, множество, задача, уравнение.

Тірек сөздер: шекаралық шарт, оператор, есепшот, жиынтық, есеп, теңдеу.

Keywords: border terms, operator, account, great number, task, equalization.

1. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ краевую задачу, порождаемую на интервале $(0,1)$, уравнением Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x),\ x \in (0,1) \tag{1}$$

и двумя $(i = 1,2)$ линейно независимыми граничными условиями

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0\ \ (i = 1,2), \tag{2}$$

где $a_{ij}(i = 1,2;\ j = 1,2,3,4)$ - комплексные постоянные.

Значения параметра λ, при которых эта краевая задача имеет ненулевые решения, называются собственными значениями, а соответствующие решения — собственными функциями. Совокупность собственных значений: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . . \lambda_n, \ldots .$ составляет спектр краевой задачи (1)-(2).

Собственному значению приписываются кратность k, если при этом значений параметра задачи (1)-(2) k-кратно разрешима [1.,с.193].

Фундаментальная система решений уравнения (1), определяемая начальными данными: $y_1(\lambda,0)=y_2'(\lambda,0)=1;\ y_1'(\lambda,0)=y_2(\lambda,0)=0$ имеет вид

$$y_1(\lambda,x)=\cos\sqrt{\lambda}\,x,\ \ y_2(\lambda,x)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}. \qquad (3)$$

Так как общее решение $y(\lambda,x)$ уравнения (1) является линейной комбинацией функций $y_1(\lambda,x), y_2(\lambda,x);\ \ y(\lambda,x)=A\times y_1(\lambda,x)+By_2(\lambda,x)$, то

$$U_i[y]=A\big[a_{i1}+a_{i3}y_1(\lambda,1)+a_{i4}y_1'(\lambda,1)+B \\ \times[a_{i2}+a_{i3}y_2(\lambda,1)+a_{i4}y_2'(\lambda,1)]\big]\ \ (i=1,2)$$

откуда следует, что краевая задача (1)-(2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уровнений

$$\begin{cases}A[a_{11}+a_{13}y_1(\lambda,1)+a_{14}y_1'(\lambda,1)]+B[a_{12}+a_{13}y_2(\lambda,1)+a_{14}y_2'(\lambda,1)]=0,\\ A[a_{21}+a_{23}y_1(\lambda,1)+a_{24}y_1'(\lambda,1)]+B[a_{22}+a_{23}y_2(\lambda,1)+a_{24}y_2'(\lambda,1)]=0\end{cases}$$

относительно коэффициентов A, B имеет нетривиальное решение. Поэтому собственные значения рассматриваемой задачи совпадают с квадратами корней его характерического детерминанта

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}+a_{13}y_1(\lambda,1)+a_{14}y_1'(\lambda,1) & a_{12}+a_{13}y_2(\lambda,1)+a_{14}y_2'(\lambda,1)\\ a_{21}+a_{23}y_1(\lambda,1)+a_{24}y_1'(\lambda,1) & a_{22}+a_{23}y_2(\lambda,1)+a_{24}y_2'(\lambda,1)\end{vmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель и замечая, что вронскиан $W[y_1,y_2]=y_1(\lambda,x)\times y_2'(\lambda,x)-y_1'(\lambda,x)\times y_2(\lambda,x)$ тождественно равен единице, находим

$$\Delta(\lambda)=\Delta_{12}+\Delta_{34}+\Delta_{13}\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}+(\Delta_{14}+\Delta_{32})\cos\sqrt{\lambda}-\Delta_{42}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}=0, \qquad (4)$$

где $\Delta_{ij}=a_{1i}a_{2j}-a_{1j}\times a_{2i}$ - минор, составленный из i- и j - го столбцов матрицы A, составленной из коэффициентов граничных условий

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\end{pmatrix}, \qquad (5)$$

Кратность собственного значения λ_0 меньше или равна кратности λ_0 как корня функций $\Delta(\lambda)$. $\Delta(\lambda)$ представляет собой целую функцию от λ. Эти две кратности не обязаны совпадать, например, $\lambda=0$ есть простое собственное значение задачи [1.,с.193]

$$-y''(x)=\lambda y(x); y(0)-y(1)+\tfrac{1}{2}y'(1)=0, y'(0),$$

но оно является двукратным корнем соответствующего детерминанта

$$\Delta(\lambda) = 1 - chk + \frac{k}{2} shk, \ (k^2 = \lambda).$$

ПРИМЕР. Для задачи о собственных значениях

$$y'' + \lambda y = 0; \ y(a) = y(b), \ y'(a) = y'(b)$$

следует положить

$$\varphi(x) = \begin{cases} coskx \\ 1, \\ chkx \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}\sin kx & \text{при } \lambda = k^2 > 0 \\ x & \text{при } \lambda = 0, \\ \frac{1}{k} shkx & \text{при } \lambda = -k^2 < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\Delta(\lambda) = \begin{cases} 2 - 2cosk(b-a) \\ 0 \\ 2 - 2chk(b-a) \end{cases}$$

т.е. собственные значение образуют последовательность

$$\lambda_m = \left(\frac{2\pi m}{b-a}\right)^2, m = 0,1,2,....,$$

причем все λ_m при $m \neq 0$ двукратны [1.,194].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Предположим, что характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ имеет счетное множество кратных корней, то какой вид принимает граничные условия такой краевой задачи. Например, известно, что если краевая задача (1)-(2) имеет не менее двух двукратных собственных значений , то она принимает вид

$$y(0) + ky(1) = 0, \ y'(0) + ky'(1) = 0, \ (k^2 = 1).$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Если $a \times d \neq 0$, то уравнение

$$\Delta(\lambda) = a + \left(\frac{b}{\sqrt{\lambda}} + d\sqrt{\lambda}\right)\sin\sqrt{\lambda} + c \times \cos\sqrt{\lambda} = 0 \qquad (6)$$

может иметь не более четырех кратных нулей, отличных от нуля;

б) если $a = 0, d \neq 0$, то уравнение (6) может иметь не более двух кратных нулей, отличных от нуля.

в) если $d = 0, b \neq 0$, то уравнения (6) может иметь не более двух кратных нулей.

СЛЕДСТВИЕ 1.

Если $d = 0, b \neq 0, c^2(a^2 - c^2) = 0$, то уравнение (6) может иметь не более одного кратного нуля.

СЛЕДСТВИЕ 2.

Если $d = 0, 2bc(a^2 - c^2) - 2b^2c^2 + a^2b^2 = 0,$

$b^2(a^2 - c^2) - b^4 - 2b^3c \neq 0$,то уравнение (6) не имеет кратных нулей, например, при $(c = 0, a = 0, b \neq 0)$.

ЛЕММА 2. Если $c \neq 0$ и функция

$$\Delta(\lambda) = a + \frac{b}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda} + c \times \cos\sqrt{\lambda}$$

имеет более двух кратных нулей, то $b = 0,\ a^2 = c^2$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ краевой задачи (1)-(2) имеет счетное множество кратных нулей, то краевые условия (2) не усиленно регулярны [2.,с.71].

ТЕОРЕМА 2. Если характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ краевой задачи (1)-(2) имеет счетное количество кратных нулей, то оператор Штурма-Лиувилля соответствующий этой краевой задаче принимает один из следующих видов

$$L_1(k)y = -y''(x), x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0, & k \in \bar{C}, k \neq -1; \\ y(0) + ky(1) = 0 \end{cases}$$

$$L_3(k)y = -y''(x), \quad x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} k \times y'(0) - y'(1) = 0, & k \in \bar{C}, k \neq -1 \\ y(0) - y(1) = 0 \end{cases}$$

или им сопряженных, где k принадлежит к расширенной комплексной плоскости

ТЕОРЕМА 3. Если операторы A и B определены формулами

$$Ay = iy'(x), y(0) + ky(1) = 0, \quad k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

$$Bz = iz'(x), z(0) + z(1) = 0,$$

то имеет место формулы

1) $L_1(k) = BA, \qquad\qquad k \in \bar{C}, k \neq -1$

2) $L_2\left(\frac{1}{k}\right) = AB,$

где

$$L_1(k)y = -y''(x), x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0, \\ y(0) + ky(1) = 0 \end{cases} k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

$$L_2(k)y = -y''(x),\ x \in (0,1);$$

$$\begin{cases} ky'(0) + y'(1) = 0, \\ y(0) + y(1) = 0 \end{cases} k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

ТЕОРЕМА 4. Если операторы C и D определены формулами

$$Cy = i\, y'(x),\ ky(0) - y(1) = 0,\ k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

$$Dz = i\, z'(x),\ z(0) - z(1) = 0,$$

то имеет место формулы

3) $L_3(k) = C \times D;$

4) $L_4(k) = D \times C,$

где

$$L_3(k)y = -y''(x),\ x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} ky'(0) - y'(1) = 0, \\ y(0) - y(1) = 0; \end{cases} k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

$$L_4(k)y = -y''(x),\ x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} y'(0) - y'(1) = 0, \\ y(0) - ky(1) = 0 \end{cases} k \in \bar{C},\ k \neq -1$$

ТЕОРЕМА 5. Если $k^2 \neq 1$, то имеет место формулы

а) $L_1(k) = P^{-1}(k)L_1(o)\, P(k),\ P(k)y(x) = y(x) + ky(1-x);$

б) $L_3(k) = Q^{-1}(k)L_3(\infty)Q(k),\ Q(k)y(x) = ky(x) + y(1-x).$

ТЕОРЕМА 6. Имеет место уравнение Лакса

$$\dot{L}_1(k) \dot{=} L_1(k)(kI + S)^{-1} - (kI + S)^{-1}L_1(k),$$

где $(^\circ)$ – означает дифференцирование по параметру k.

Следует отметить, что тема настоящей работы мало исследовано [2.,с.9].

ЛИТЕРАТУРА

1 Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.-576с.

2 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.-528с.

REFERENCES

1 Kamke E. Spravochnik po differencial’nym uravneniyam. M.: Nauka, 1971.-576(in Russ.).

4 Naimark M.A. Lineinye differencial’nye operatory. M.: Nauka, 1969.-528 (in Russ.).

Шалданбаева А.А,Шалданбаев А.Ш, Оразов И.О.

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ.)

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЛАРЫНЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫ

Резюме

Бұл еңбекте бір еселі меншікті мәндері шексіз көп, Штурм-Лиувилл операторларының шекаралық шарттары алынды.

Тірек сөздер: шекаралық шарт, оператор, есепшот, жиынтық, есеп, теңдеу.

Shaldanbaeva A.A,Shaldanbaev A.Sh, Orazov I.O.

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent)

OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATORS POSSESSING A COUNTABLE SET

AND THE SINGLE-VALUED EIGENVALUE

Summary

In this paper we obtained the boundary conditions of the Sturm-Liouville operators possessing a countable set and the single-valued eigenvalue.

Keywords: border terms, operator, account, great number, task, equalization.

Поступила 01.09.2013 г.